प्रत्यावर्ती धारा

[ALTERNATING CURRENT]

प्रश्न :– दिष्ट धारा, प्रत्यावर्ती धारा और प्रत्यावर्ती वि. वा. बल को परिभाषित करो।

उत्तर :– दिष्ट धारा :– वह विद्युत धारा जिसकी दिशा परिवर्तित नहीं होती है जबकि परिमाण परिवर्तित हो या न हो, दिष्ट धारा कहलाती है।

दिष्ट धारा दो प्रकार की होती है –

(i) स्थायी दिष्ट धारा :– स्थायी दिष्ट धारा वह विद्युत धारा है जिसका परिमाण और दिशा दोनों नहीं बदलते हैं। सेल या बैटरी से प्राप्त विद्युत धारा स्थायी दिष्ट धारा है।

(ii) परिवर्ती दिष्ट धारा :– परिवर्ती दिष्ट धारा वह विद्युत धारा है जिसका परिमाण समय के साथ बदलता है लेकिन दिशा नहीं बदलती है।

प्रत्यावर्ती धारा :– वह विद्युत धारा जिसका परिमाण और दिशा दोनो समय के साथ आवर्ती रूप से लगातार बदलते हैं, प्रत्यावर्ती विद्युत धारा कहलाती है।

प्रत्यावर्ती धारा निम्न समीकरण से दी जाती है –

$$I = I_0 \sin \omega t$$

जहाँ $I =$ प्रत्यावर्ती धारा का तात्क्षणिक मान, $I_0 =$ प्रत्यावर्ती धारा का शिखर मान और $\omega =$ कोणीय आवृत्ति

प्रत्यावर्ती वि. वा. बल :– वह वि. वा० बल जिसका परिमाण और दिशा दोनों समय के साथ आवर्ती रूप से बदलते रहते हैं, प्रत्यावर्ती वि. वा. बल कहलाता है।

प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न समीकरण से दिया जाता है–

$$E = E_0 \sin \omega t$$

जहाँ $E =$ प्रत्यावर्ती वि. वा. बल का तात्क्षणिक मान, $E_0 =$ प्रत्यावर्ती वि. वा. बल का शिखर मान और $\omega =$ कोणीय आवृत्ति

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती वि. वा. बल और प्रत्यावर्ती धारा के सूत्र निगमित करो।

उत्तर :– माना $PQRS$ एक आयताकार कुण्ड़ली है, जिसका क्षेत्रफल A है और उसमें फेरों की संख्या N है। यह B तीव्रता के एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में कोणीय वेग ω से घूम रही है।

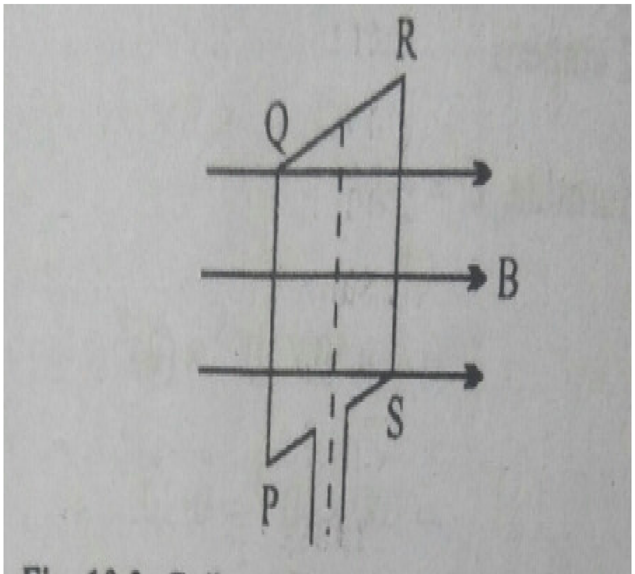


Fig. 10·2. Coil rotating in magnetic field.

माना कुण्ड़ली का अभिलम्ब चुम्बकीय क्षेत्र के साथ θ कोण बनाता है, अतः कुण्ड़ली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi = NBA\cos\theta \text{ --- } (1)$$

लेकिन कोणीय वेग $\omega = \frac{\theta}{t}$

या $\theta = \omega t$ --- (2)

समी. (2) से समी. (1) में θ का मान रखने पर

$$\phi = NBA\cos\omega t \text{ -- } (3)$$

ज्ब कुण्ड़ली चुम्बकीय क्षेत्र में घूमती है तो इससे सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स बदलता है, अतः कुण्ड़ली में एक वि. वा. बल प्रेरित हो जाता है, जिसका मान निम्न समीकरण से प्राप्त होता है–

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\therefore \quad e = -\frac{d}{dt}(NBA\cos\omega t)$$

या $e = -NBA\frac{d}{dt}(\cos\omega t)$

या $e = -NBA(-\omega\sin\omega t)$

या $e = NBA\,\omega\sin\omega t$

या $$e = e_0 \sin \omega t \text{ -------------------------------- } (4)$$

जहाँ $e_0 = NBA\omega =$ प्रत्यावर्ती वि. वा. बल का शिखर मान

समीकरण (4) प्रत्यावर्ती वि. वा. बल का समीकरण है।

यदि कुण्ड़ली के परिपथ का प्रतिरोध R हो तो कुण्ड़ली में प्रवाहित धारा

$$I = \frac{e}{R}$$

समी. (4) से e का मान रखने पर

$$I = \frac{e_0 \sin \omega t}{R}$$

या $$I = I_0 \sin \omega t \text{ -------------------------------------- } (5)$$

जहाँ $I_0 = \frac{e_0}{R} =$ प्रत्यावर्ती धारा का शिखर मान

समी. (5) प्रत्यावर्ती धारा का समीकरण है।

प्रश्न :– निम्नलिखित को परिभाषित करो –

(i) प्रत्यावर्ती धारा का आयाम या शिखर मान (ii) आवर्तकाल (iii) आवृत्ति

उत्तर :– (i) प्रत्यावर्ती धारा का आयाम या शिखर मान :– प्रत्यावर्ती धारा के अधिकतम मान I_0 को प्रत्यावर्ती धारा का आयाम या शिखर मान कहते हैं।

(ii) आवर्तकाल :– वह समय जिसमें प्रत्यावर्ती धारा एक चक्र पूर्ण करती है, उसे प्रत्यावर्ती धारा का आवर्तकाल कहते हैं।

यदि प्रत्यावर्ती धारा की कोणीय आवृत्ति ω हो तो उसका आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(iii) आवृत्ति :– प्रत्यावर्ती धारा एक सेकण्ड़ में जितने चक्र पूर्ण कर लेती है उसे उसकी आवृत्ति कहते हैं।

प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति उसके आवर्तकाल के व्युत्क्रम के बराबर होती है। अतः प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

प्रश्न :– एक पूर्ण चक्र में प्रत्यावर्ती धारा का औसत मान ज्ञात करो।

उत्तर :– एक पूर्ण चक्र में प्रत्यावर्ती धारा का औसत मान :– प्रत्यावर्ती धारा निम्न समीकरण से दी जाती है–

$$I = I_0 \sin \omega t \text{ -- } (1)$$

एक पूर्ण चक्र में प्रत्यावर्ती धारा का औसत मान

$$I_{av} = \frac{\int_0^T I\, dt}{\int_0^T dt}$$

या $$I_{av} = \frac{\int_0^T I_0 \sin \omega t\, dt}{\int_0^T dt}$$

या $$I_{av} = \frac{I_0 \int_0^T \sin \omega t\, dt}{\int_0^T dt}$$

या $$I_{av} = \frac{I_0 \left[\frac{-\cos \omega t}{\omega}\right]_0^T}{[t]_0^T}$$

या $$I_{av} = \frac{I_0}{\omega} \frac{[-\cos \omega T - (-\cos 0)]}{[T-0]}$$

या $$I_{av} = \frac{I_0 \times T}{2\pi} \frac{\left[-\cos \frac{2\pi T}{T} + 1\right]}{T}$$

या $$I_{av} = \frac{I_0}{2\pi} [-1 + 1]$$

या $$I_{av} = 0$$

$$\boxed{I_{av} = 0}$$

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य मूल मान से क्या समझते हैं? इसका मान ज्ञात करो।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग माध्य मूल मान :– एक पूर्ण चक्र में प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग के औसत मान के वर्गमूल को धारा का वर्ग माध्य मूल मान कहते हैं।

माना किसी क्षण प्रत्यावर्ती धारा निम्न समीकरण से दी जाती है –

$$I = I_0 \sin \omega t \text{ -- } (1)$$

परिभाषानुसार प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग का औसत मान

$$I_{av}^2 = \frac{\int_0^T I^2\, dt}{\int_0^T dt}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t\, dt}{\int_0^T dt}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt}{\int_0^T dt}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2 \int_0^T \frac{(1-\cos 2\omega t)}{2} dt}{\int_0^T dt}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \frac{\int_0^T (1-\cos 2\omega t) dt}{[t]_0^T}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \frac{\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t\, dt}{[T-0]}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \frac{[t]_0^T - \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T}{[T-0]}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \frac{[T-0] - \frac{1}{2\omega}\left[\sin 2\times\frac{2\pi}{T}T - \sin 0\right]}{T}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \frac{T - \frac{1}{2\omega}[\sin 4\pi - \sin 0]}{T}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \frac{T-0}{T}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \frac{T}{T}$$

या $$I_{av}^2 = \frac{I_0^2}{2} \quad \text{---} \quad (2)$$

अतः प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग माध्य मूल मान

$$I_{rms} = \sqrt{I_{av}^2}$$

या $$I_{rms} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2}}$$

$$\boxed{I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$$

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती धारा और दिष्ट धारा में अन्तर लिखिये।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा और दिष्ट धारा में अन्तर :–

क्रमांक	**प्रत्यावर्ती धारा**	**दिष्ट धारा**
1.	प्रत्यावर्ती धारा वह धारा है जिसका परिमाण तथा दिशा दोनों समय के साथ बदलते रहते हैं।	दिष्ट धारा वह धारा है हजसका परिमाण और दिशा दोनों समय के साथ नहीं बदलते हैं।
2.	समान वोल्टेज की प्रत्यावर्ती धारा, दिष्ट धारा की अपेक्षा अधिक खतरनाक होती है।	समान वोल्टेज की दिष्ट धारा, प्रत्यावर्ती धारा की अपेक्षा कम खतरनाक होती है।
3.	प्रत्यावर्ती धारा को नापने वाले यंत्र धारा के ऊष्मीय प्रभाव पर आधारित होते हैं।	दिष्ट धारा को नापने वाले यंत्र धारा के चुम्बकीय प्रभाव पर आधारित होते हैं।
4.	प्रत्यावर्ती धारा को नापने वाले यंत्रों से दिष्ट धारा भी नापी जा सकती है।	दिष्ट धारा नापने वाले यंत्रों से प्रत्यावर्ती धारा नहीं नापी जा सकती है।
5.	प्रत्यावर्ती धारा रासायनिक प्रभाव, चुम्बकीय प्रभाव नहीं दर्शाती है। केवल ऊष्मीय प्रभाव दर्शाती है।	दिष्ट धारा रासायनिक प्रभाव, चुम्बकीय प्रभाव और ऊष्मीय प्रभाव सभी दर्शाती है।
6.	प्रत्यावर्ती धारा का उपयोग विद्युत चुम्बक बनााने में नहीं किया जा सकता है।	दिष्ट धारा का उपयोग विद्युत चुम्बक बनाने में किया जा सकता है।
7.	प्रत्यावर्ती धारा के साथ ट्रान्सफार्मर उपयोग में लाया जा सकता है।	दिष्ट धारा के साथ ट्रान्सफार्मर उपयोग में नहीं लाया जा सकता है।

प्रश्न :– प्रतिरोध, प्रतिघात और प्रतिबाधा को परिभाषित करो।

उत्तर :– प्रतिरोध :– प्रत्यावर्ती परिपथ में चालक द्वारा डाले गये अवरोध को उस चालक का प्रतिरोध कहते हैं। इसका मात्रक ओह्म है।

प्रतिघात :– प्रत्यावर्ती परिपथ में एक अकेले घटक जैसे– केवल प्रेरकत्व कुण्ड़ली L, या केवल संधारित्र C के लगे होने पर परिपथ के प्रभावी प्रतिरोध को प्रतिघात कहते हैं। इसे X से प्रदर्शित करते हैं। इसका मात्रक ओह्म है।

प्रतिबाधा :– प्रत्यावर्ती परिपथ में प्रतिरोध R, प्रेरकत्व कुण्ड़ली L तथा संधारित्र C में से दो या दो से अधिक घटकों के लगे होने पर परिपथ के कुल प्रभावी प्रतिरोध को प्रतिबाधा कहते हैं। इसे Z से प्रदर्शित करते हैं। इसका मात्रक ओह्म है।

प्रश्न :– एक ओमीय प्रतिरोध एक प्रत्यावर्ती धारा स्रोत से जुड़ा है। परिपथ में धारा का समीकरण ज्ञात करो।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जबकि परिपथ में केवल ओह्मीय प्रतिरोध है :– चित्र में ओह्मीय प्रतिरोध R के सिरों पर प्रत्यावर्ती वि. वा. बल आरोपित किया गया है।

माना किसी क्षण t पर प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न समीकरण से दिया जाता है –

$$V = V_0 \sin \omega t \text{ -- } (1)$$

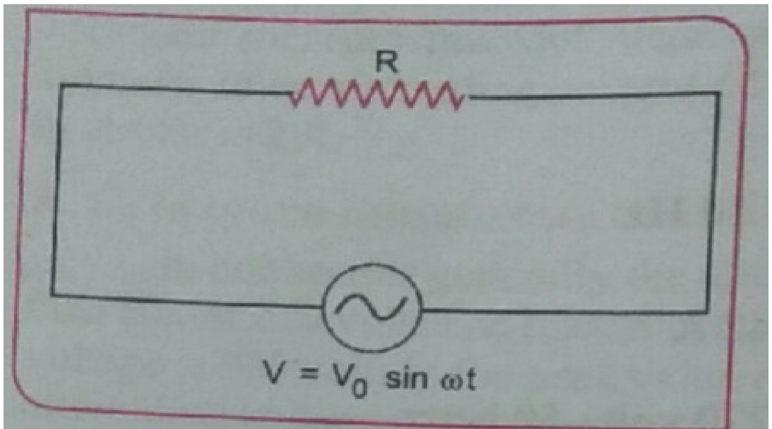


Fig. 7.7. Alternating ohmic circuit

यदि इस क्षण परिपथ में धारा I हो तो

$$I = \frac{V}{R}$$

$$I = \frac{V_0 \sin \omega t}{R}$$

या $$I = I_0 \sin \omega t \text{ -- } (2)$$

जहाँ $I_0 = \frac{V_0}{R} =$ प्रत्यावर्ती धारा का शिखर मान

समी. (1) एवं समी. (2) से स्पष्ट है कि ओह्मीय प्रतिरोध युक्त परिपथ में धारा और वोल्टेज समान कला में होते हैं।

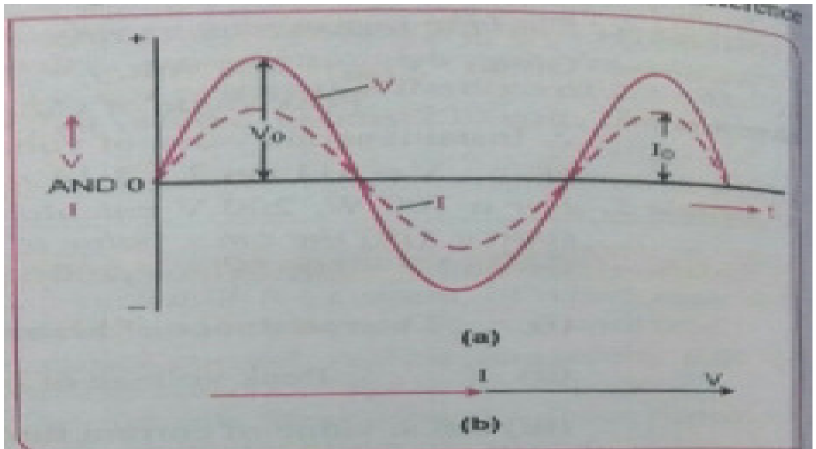


Fig. 7.8. Variation of voltage and current with time and phase difference between them for the alternating ohmic circuit

प्रश्न :– एक संधारित्र, प्रत्यावर्ती धारा स्रोत से जुड़ा है। परिपथ में धारा, धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर और परिपथ की प्रतिघात के सूत्र निगमित करो।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जबकि परिपथ में केवल संधारित्र लगा है :– चित्र में C धारिता के संधारित्र के सिरों के मध्य प्रत्यावर्ती वि. वा. बल आरोपित किया गया है –

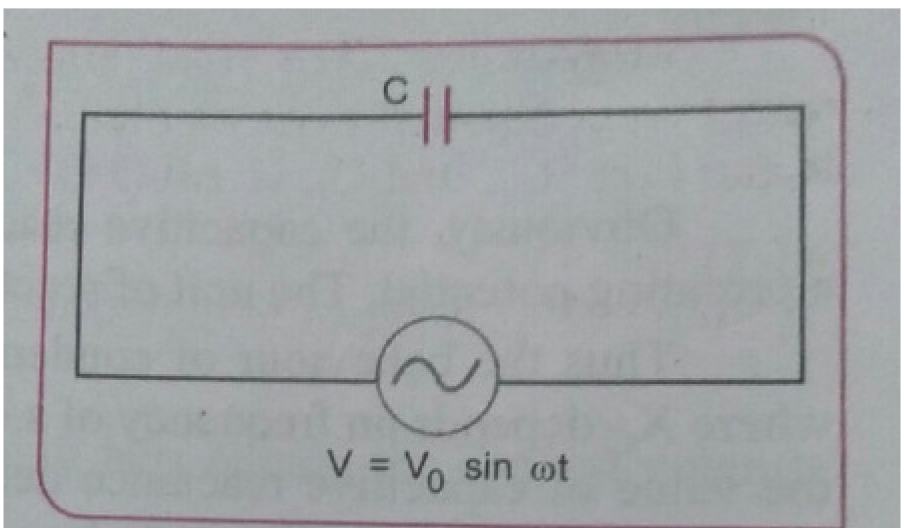


Fig. 7.9. Alternating current circuit with a condenser alone

किसी क्षण t पर प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न समीकरण से दिया जाता है –

$V = V_0 \sin \omega t$ -------------------------------------- (1)

यदि इस क्षण संधारित्र के सिरों के मध्य विभवान्तर V हो तो संधारित्र की प्लेटों पर आवेश

$$q = CV$$

या $$q = CV_0 \sin \omega t \text{ ------------------------------------ } (2)$$

परिपथ में धारा $$I = \frac{dq}{dt}$$

या $$I = \frac{d}{dt}(CV_0 \sin \omega t)$$

या $$I = CV_0 \frac{d}{dt}(\sin \omega t)$$

या $$I = CV_0 \omega \cos \omega t$$

या $$I = CV_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

या $$I = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ --------------------------------- } (3)$$

जहाँ $$I_0 = CV_0 \omega$$

या $$\frac{I_0}{V_0} = \omega C$$

या $$\frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

या $$X_C = \frac{1}{\omega C} \text{ -- } (4)$$

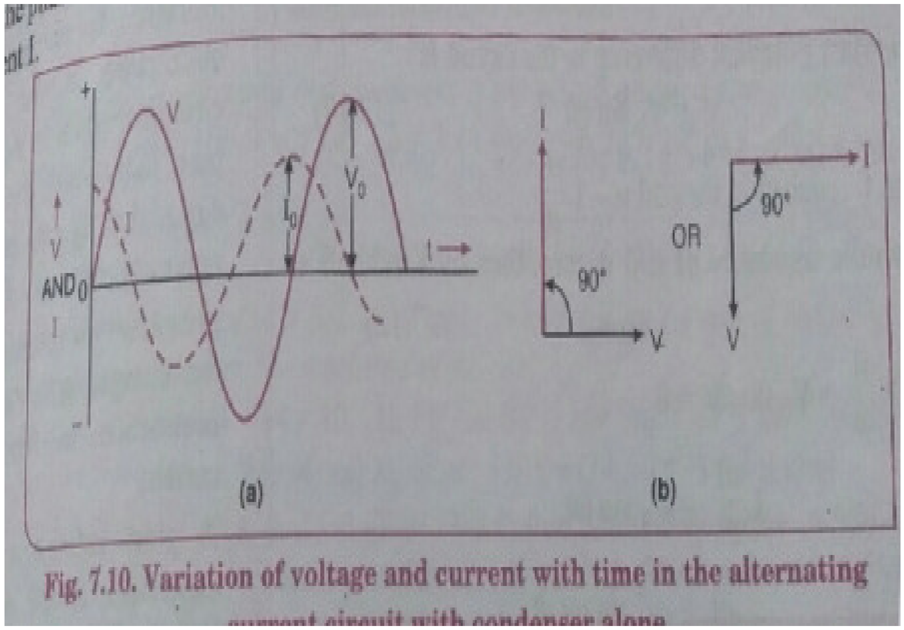
जहाँ $$X_C = \frac{V_0}{I_0}$$

यहाँ X_C को धारितीय प्रतिधात कहते हैं।

समी. (1) एवं समी. (3) से स्पष्ट है कि धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर $\frac{\pi}{2}$ रेड़ियन है।

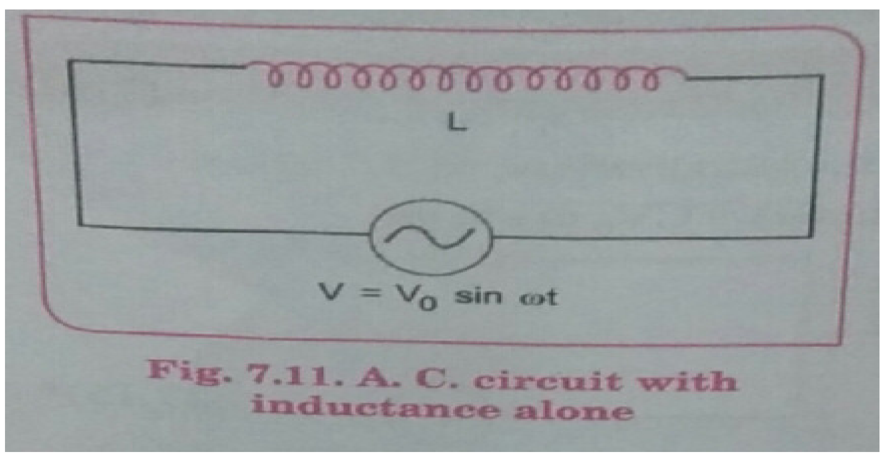
अतः शुद्ध धारिता युक्त परिपथ में धारा I विभवान्तर V से कला में 90^0 अग्रगामी होती है या विभवान्तर V धारा I से कला में 90^0 पश्चगामी होता है।

.



प्रश्न :– एक शुद्ध प्रेरकत्व, प्रत्यावर्ती धारा स्रोत से जुड़ा है। परिपथ में धारा, धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर और परिपथ की प्रतिघात के सूत्र निगमित करो।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जबकि परिपथ में केवल प्रेरक कुण्ड़ली हो :– चित्र में एक शुद्ध प्रेरकत्व L के सिरों पर प्रत्यावर्ती वि. वा. बल आरोपित किया गया है।



किसी क्षण प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न समीकरण से दिया जाता है –

$$V = V_0 \sin \omega t \text{ -- (1)}$$

यदि कुण्ड़ली में धारा परिवर्तन की दर $\frac{dI}{dt}$ हो तो

कुण्ड़ली में प्रेरित वि. वा. बल $= -L\frac{dI}{dt}$ -------------------------------------- (2)

यदि कुण्ड़ली का प्रतिरोध शून्य हो तो किरचॉफ के नियम से

$$-L\frac{dI}{dt} + V = 0$$

या $$L\frac{dI}{dt} = V$$

समी. (1) से V का मान रखने पर

$$L\frac{dI}{dt} = V_0 \sin \omega t$$

या $$\frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

या $$dI = \frac{V_0}{L} \sin \omega t \; dt$$

उपरोक्त समीकरण का समाकलन करने पर, किसी क्षण परिपथ में धारा

$$\int dI = \int \frac{V_0}{L} \sin \omega t \; dt$$

या $$I = \frac{V_0}{L} \int \sin \omega t \; dt$$

या $$I = \frac{V_0}{L} \left(-\frac{\cos \omega t}{\omega}\right)$$

या $$I = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

या $$I = \frac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

या $$I = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ --------------------------------- } (3)$$

जहाँ $$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

या $$V_0 = I_0 \omega L$$

या $$\frac{V_0}{I_0} = \omega L$$

या $$X_L = \omega L \text{ --- } (4)$$

यहाँ $$X_L = \frac{V_0}{I_0} = \text{प्रकत्वीय प्रतिघात}$$

समी. (1) एवं समी. (3) से स्पष्ट है कि धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर $\frac{\pi}{2}$ रेड़ियन है।

अतः शुद्ध प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा I विभवान्तर V से कला में 90^0 पश्चगामी होती है या विभवान्तर V धारा I से कला में 90^0 अग्रगामी होता है।

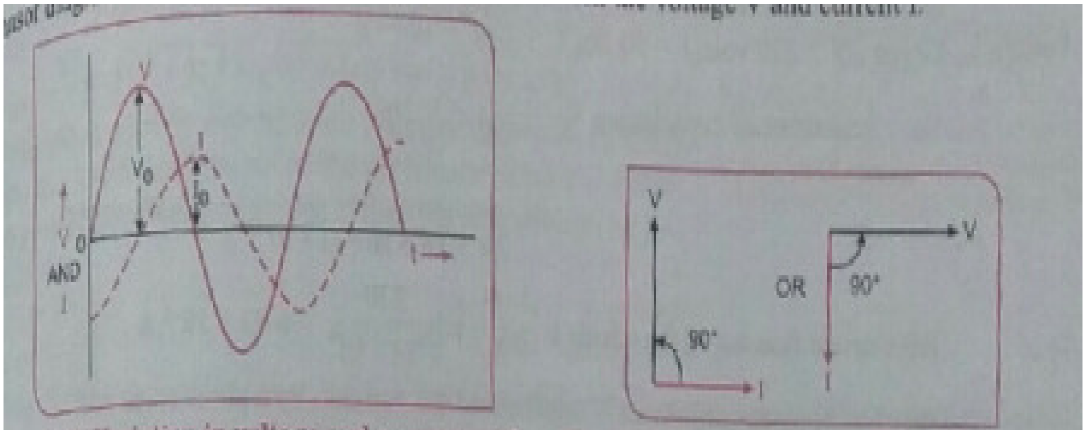


Fig. 7.12. Variation in voltage and current with time in an a. c. circuit with inductance alone

Fig. 7.13. Phase difference between V and I in a. c. circuit with inductance alone

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती $L - R$ परिपथ के लिए परिणामी विभवान्तर, प्रतिबाधा तथा धारा के लिए व्यंजक ज्ञात करो तथा धारा व विभवान्तर के मध्य कलान्तर दर्शाने वाला ग्राफ खींचिये।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जिसमें प्रतिरोध R व प्रेरकत्व L दोनों हों

($L - R$ परिपथ):– चित्र में प्रेरकत्व L और प्रतिरोध R श्रेणीक्रम में जुड़े हैं और इनके सिरों के बीच प्रत्यावर्ती वि. वा. बल लगाया गया है।

प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न सूत्र से दिया जाता है –

$$V = V_0 \sin \omega t \text{ -- (1)}$$

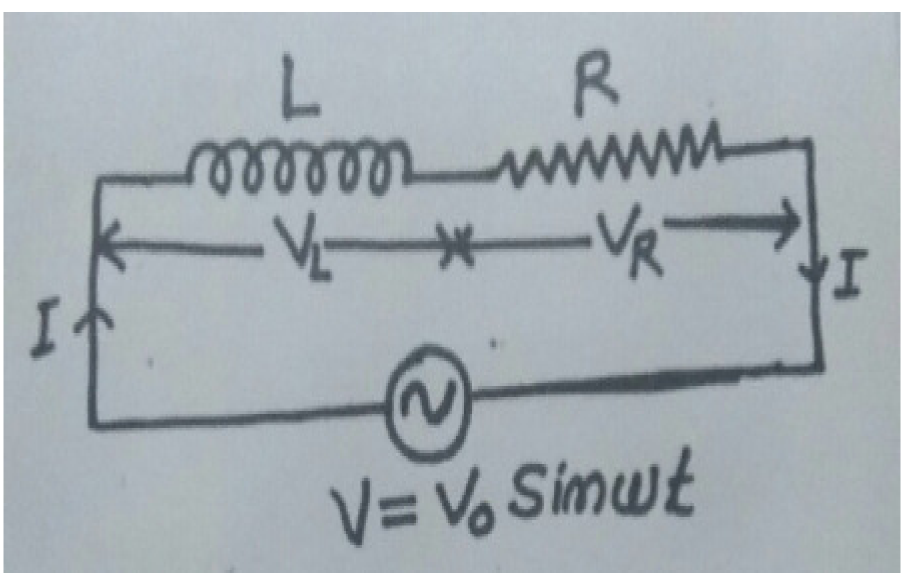


Fig. L-R A.C. Circuit

माना किसी क्षण t पर परिपथ में धारा I है, अतः

प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर

$$V_R = IR \text{ -- } (2)$$

प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर

$$V_L = IX_L \text{ --- } (3)$$

जहाँ $X_L = \omega L =$ प्रेरकत्वीय प्रतिघात

प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर V_R और धारा I समान कला में होते हैं लेकिन प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर धारा I से कला में 90^0 अग्रगामी होता है। अतः V_R और V_L के मध कलान्तर 90^0 होगा।

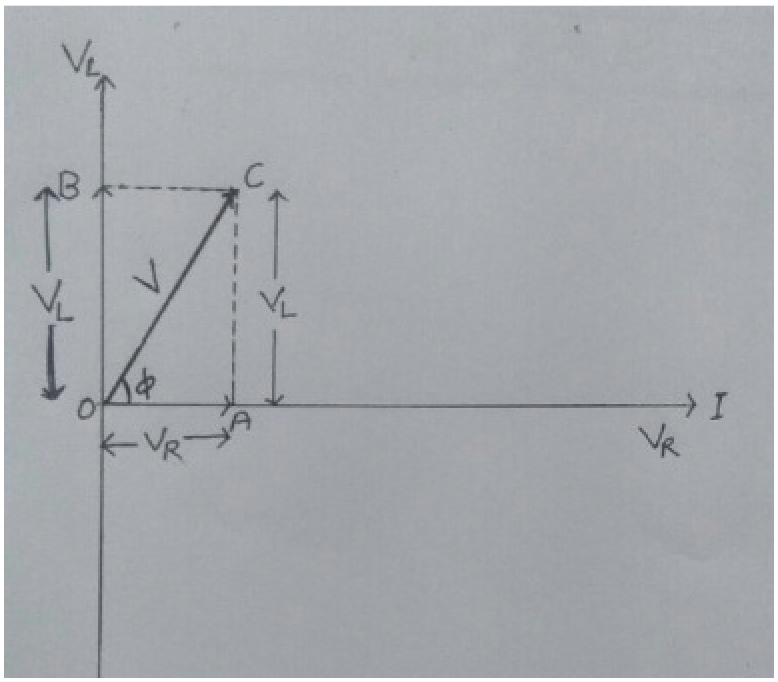


Fig. Phase difference between V_R and V_L

यदि V_R और V_L का परिणामी विभवान्तर V हो तो

$$V^2 = V_R^2 + V_L^2$$

या

$$\boldsymbol{V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2}} \text{ --------------------------------------- } (4)$$

उपरोक्त समीकरण में V_R और V_L के मान रखने पर

$$V = \sqrt{I^2R^2 + I^2X_L^2}$$

या $$V = \sqrt{I^2(R^2 + X_L^2)}$$

या $$V = I\sqrt{R^2 + X_L^2}$$

या $$\frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

या $$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

या $$\boldsymbol{Z = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}} \text{ --- (5)}$$

जहाँ $Z = \frac{V}{I} = L - R$ परिपथ की प्रतिबाधा

यदि धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर ϕ हो तो चित्र से

$$\tan\phi = \frac{V_L}{V_R}$$

या $$\tan\phi = \frac{IX_L}{IR}$$

या $$\tan\phi = \frac{X_L}{R}$$

या $$\boldsymbol{\tan\phi = \frac{\omega L}{R}} \text{ --- (6)}$$

फेजर आरेख से स्पष्ट है कि परिपथ में धारा I आरोपित विभवान्तर V से कला में ϕ कोण से पश्चगामी होती है। अतः परिपथ में धारा निम्न होगी –

$$\boldsymbol{I = I_0 \sin(\omega t - \phi)} \text{ --- (7)}$$

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती $C - R$ परिपथ के लिए परिणामी विभवान्तर, प्रतिबाधा तथा धारा के लिए व्यंजक ज्ञात करो तथा धारा व विभवान्तर के मध्य कलान्तर दर्शाने वाला ग्राफ खींचिये।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जिसमें प्रतिरोध R व धारिता C दोनों हों

($C - R$ परिपथ):– चित्र में C धारिता का संधारित्र और प्रतिरोध R श्रेणीक्रम में जुड़े हैं और इनके सिरों के बीच प्रत्यावर्ती वि. वा. बल लगाया गया है।

प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न सूत्र से दिया जाता है –

$$V = V_0 \sin\omega t \text{ --- (1)}$$

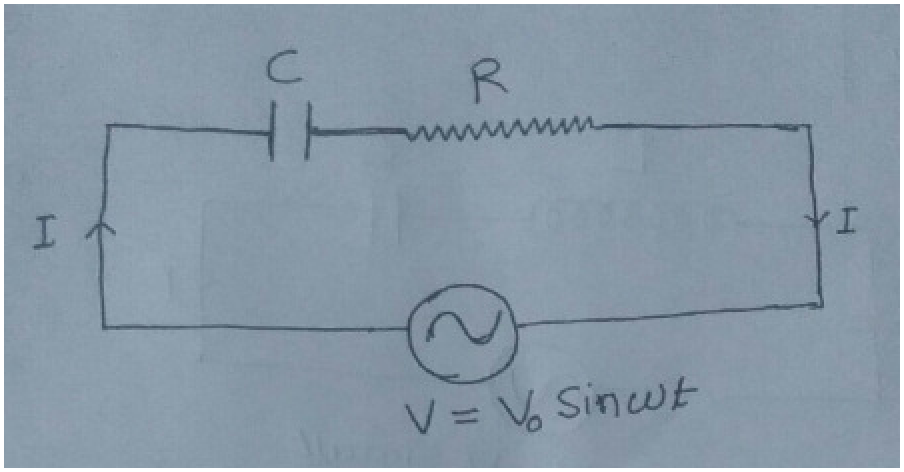


Fig R-C Alternating circuit

माना किसी क्षण t पर परिपथ में धारा I है, अतः

प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर

$$V_R = IR \text{ --- } (2)$$

संधारित्र C के सिरों पर विभवान्तर

$$V_C = IX_C \text{ --- } (3)$$

जहाँ $X_C = \frac{1}{\omega C} =$ धारितीय प्रतिघात

प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर V_R और धारा I समान कला में होते हैं लेकिन संधारित्र C के सिरों पर विभवान्तर धारा I से कला में 90^0 पश्चगामी होता है। अतः V_R और V_C के मध कलान्तर 90^0 होगा।

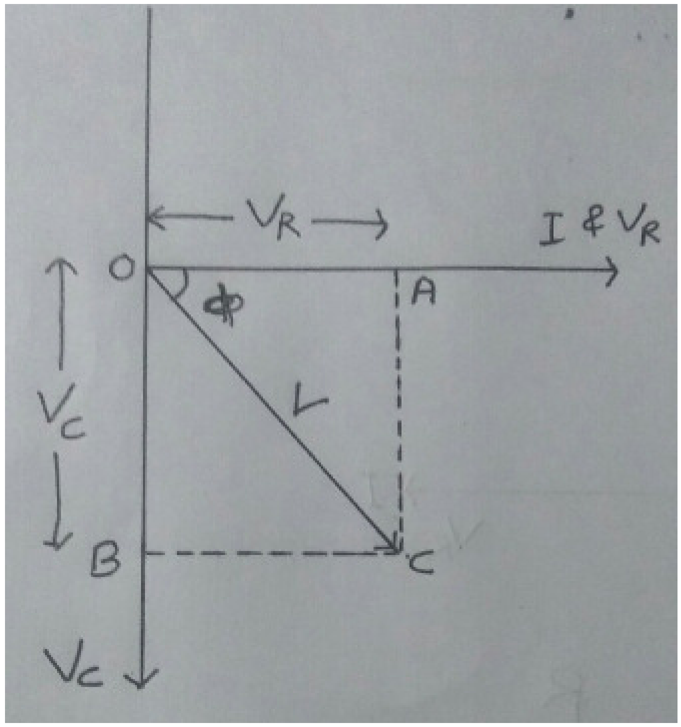


Fig. Phase difference between V_R and V_C

यदि V_R और V_C का परिणामी विभवान्तर V हो तो

$$V^2 = V_R^2 + V_C^2$$

या $$\mathbf{V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}} \text{ -- } (4)$$

उपरोक्त समीकरण में V_R और V_C के मान रखने पर

$$V = \sqrt{I^2R^2 + I^2X_C^2}$$

या $$V = \sqrt{I^2(R^2 + X_C^2)}$$

या $$V = I\sqrt{R^2 + X_C^2}$$

या $$\frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

या $$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

या $$\mathbf{Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}} \text{ -- } (5)$$

जहाँ $Z = \frac{V}{I} =$ $R - C$ परिपथ की प्रतिबाधा

यदि धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर ϕ हो तो चित्र से

$$\tan\phi = \frac{V_C}{V_R}$$

या $$\tan\phi = \frac{IX_C}{IR}$$

या $$\tan\phi = \frac{X_C}{R}$$

या $$\tan\phi = \frac{1}{\omega CR} \text{ -- (6)}$$

फेजर आरेख से स्पष्ट है कि परिपथ में धारा I आरोपित विभवान्तर V से कला में ϕ कोण से अग्रगामी होती है। अतः परिपथ में धारा निम्न होगी –

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi) \text{ -------------------------------------- (7)}$$

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती $L - C$ परिपथ के लिए परिणामी विभवान्तर, प्रतिबाधा तथा धारा के लिए व्यंजक ज्ञात करो तथा धारा व विभवान्तर के मध्य कलान्तर दर्शाने वाला ग्राफ खींचिये।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जिसमें प्रेरकत्व L व धारिता C दोनों हों

($L - C$ परिपथ):– चित्र में C धारिता का संधारित्र और प्रेरकत्व L श्रेणीक्रम में जुड़े हैं और इनके सिरों के बीच प्रत्यावर्ती वि. वा. बल लगाया गया है।

प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न सूत्र से दिया जाता है –

$$V = V_0 \sin\omega t \text{ -------------------------------------- (1)}$$

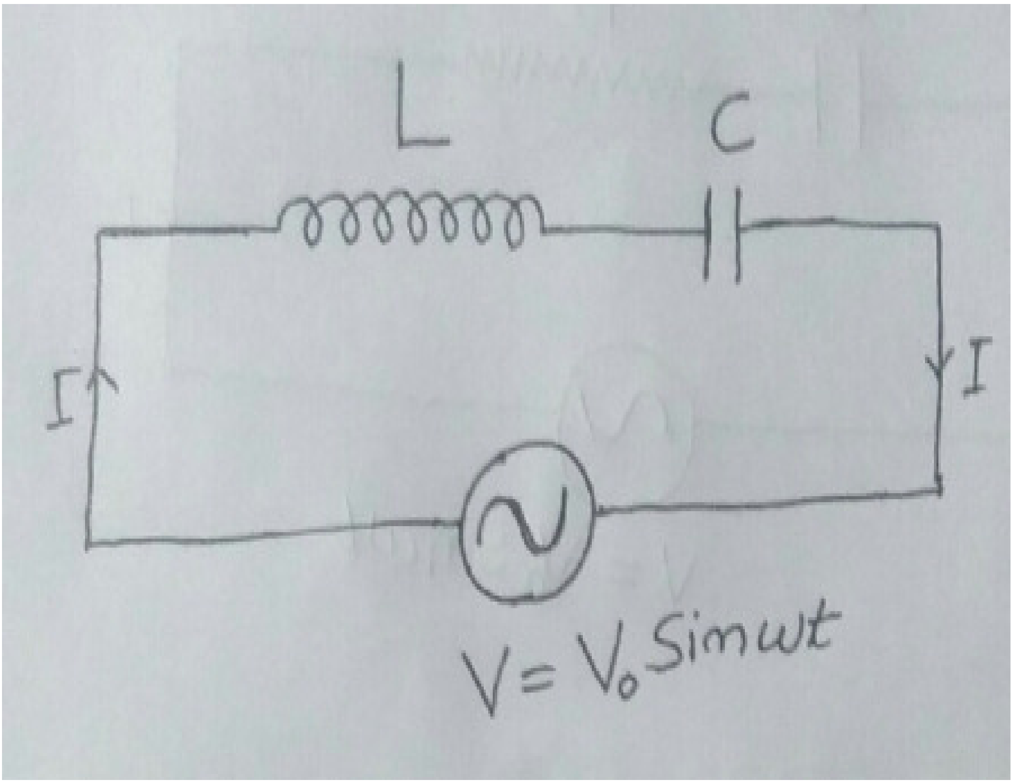


Fig. L-C Alternating circuit

माना किसी क्षण t परिपथ में धारा I है। अतः

प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर

$$V_L = IX_L \text{ -- } (2)$$

संधारित्र C के सिरों पर विभवान्तर

$$V_C = IX_C \text{ --- } (3)$$

जहाँ $X_L = \omega L =$ प्रेरकत्वीय प्रतिघात, $X_C = \frac{1}{\omega C} =$ धारितीय प्रतिघात

प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर V_L धारा I से कला में 90^0 अग्रगामी होता है लेकिन संधारित्र C के सिरों पर विभवान्तर V_C धारा I से कला में 90^0 पश्चगामी होता है। अतः V_L और V_C के मध कलान्तर 180^0 होगा।

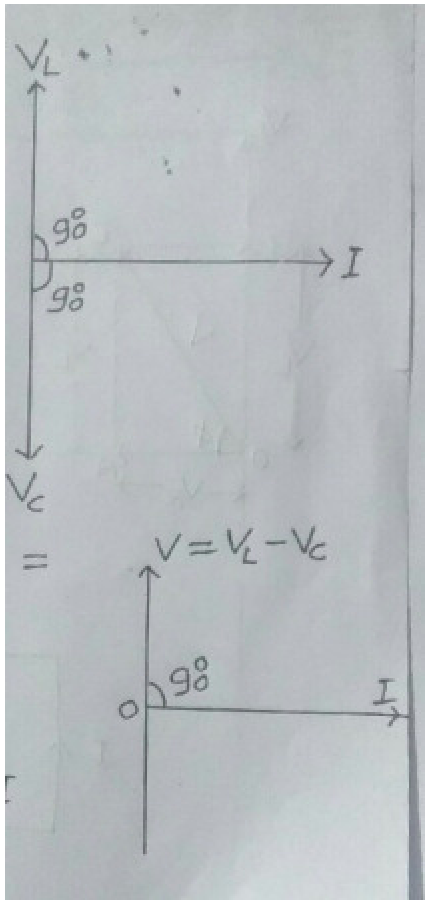


Fig. Phase difference between V_L and V_C

यदि V_L और V_C का परिणामी विभवान्तर V हो तथा यदि $V_L > V_C$, तब

$$V = V_L - V_C \text{ -- (4)}$$

उपरोक्त समीकरण में V_L और V_C के मान रखने पर

$$V = IX_L - IX_C$$

या $$V = I(X_L - X_C)$$

या $$\frac{V}{I} = X_L - X_C$$

या $$Z = X_L - X_C$$

या $$Z = \omega L - \frac{1}{\omega C} \text{ -- (5)}$$

जहाँ $Z = \frac{V}{I} = L - C$ परिपथ की प्रतिबाधा

यदि धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर ϕ हो तो चित्र से

$$\phi = 90^0 \text{ -------------------------------------- (6)}$$

फेजर आरेख से स्पष्ट है कि परिपथ में धारा I आरोपित विभवान्तर V से कला में $\phi = 90^0$ कोण से पश्चगामी होती है। अतः परिपथ में धारा निम्न होगी –

$$I = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ -------------------------------------- (7)}$$

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती $L - C - R$ परिपथ के लिए परिणामी विभवान्तर, प्रतिबाधा तथा धारा के लिए व्यंजक ज्ञात करो तथा धारा व विभवान्तर के मध्य कलान्तर दर्शाने वाला ग्राफ खींचिये।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ जिसमें प्रेरकत्व L व धारिता C और प्रतिरोध R हों

($L - C - R$ परिपथ):– चित्र में C धारिता का संधारित्र, प्रेरकत्व L और प्रतिरोध R श्रेणीक्रम में जुड़े हैं और इनके सिरों के बीच प्रत्यावर्ती वि. वा. बल लगाया गया है।

प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न सूत्र से दिया जाता है –

$$V = V_0 \sin \omega t \text{ -------------------------------------- (1)}$$

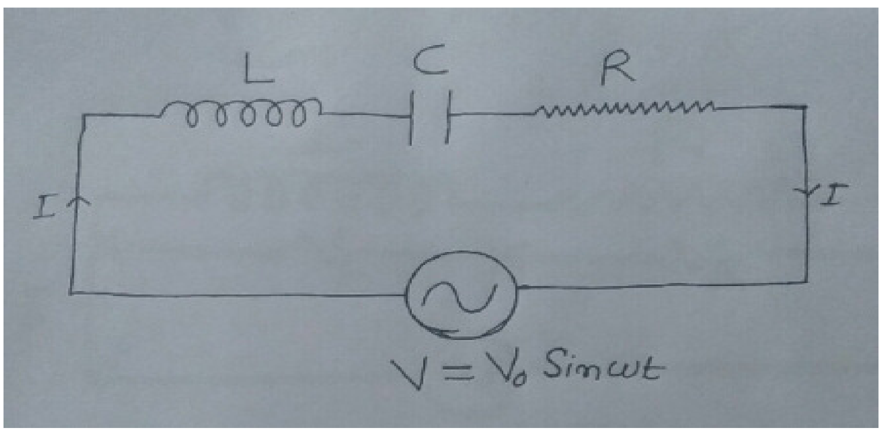


Fig. L-C-R Alternating circuit

किसी क्षण t पर प्रत्यावर्ती विभवान्तर निम्न सुत्र से दिया जाता है –

$$V = V_0 \sin \omega t \text{ -------------------------------------- (1)}$$

माना किसी क्षण t पर परिपथ में धारा I है। अतः

प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर

$$V_R = IR \text{ --- (2)}$$

प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर

$$V_L = IX_L \text{ -- } (3)$$

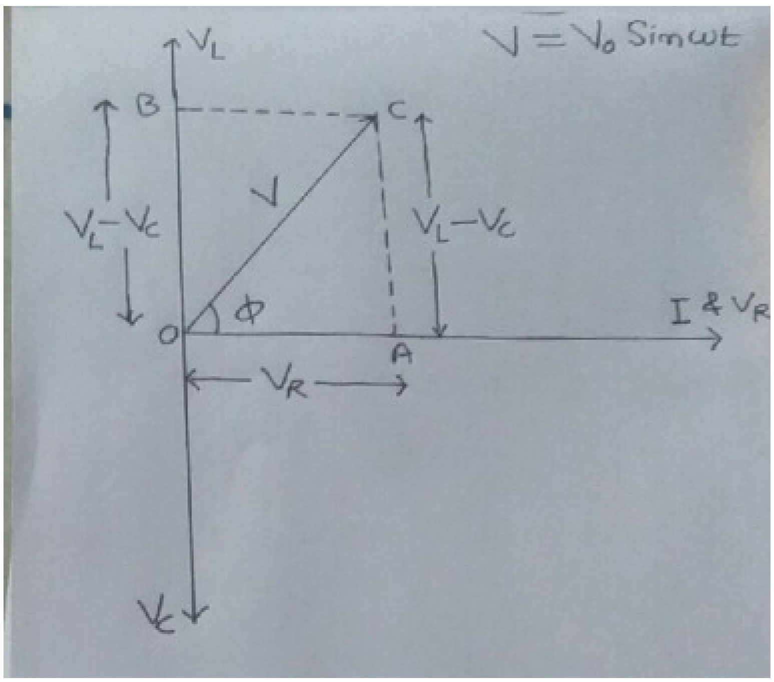
संधारित्र C के सिरों पर विभवान्तर

$$V_C = IX_C \text{ -- } (4)$$

जहाँ $X_L = \omega L =$ प्रेरकत्वीय प्रतिघात तथा $X_C = \frac{1}{\omega C} =$ धारितीय प्रतिघात है।

प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर V_R और धारा I समान कला में होते हैं लेकिन प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर V_L धारा I से कला में 90^0 अग्रगामी होता है और संधारित्र C के सिरों पर विभवान्तर V_C धारा I से कला में 90^0 पश्चगामी होता है। अतः V_L और V_C के मध्य कलान्तर 180^0 होगा।

यदि $V_L > V_C$ तो V_L और V_C का परिणामी $V_L - V_C$ होगा। फेजर आरेख से स्पष्ट है कि ($V_L - V_C$), V_R के लम्बवत् होगा।



यदि $V_L - V_C$ और V_R का परिणामी V हो तो

$$\boldsymbol{V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}} \text{ -------------------------------- } (5)$$

उपरोक्त समीकरण में V_R, V_L और V_C के मान रखने पर

$$V = \sqrt{I^2R^2 + (IX_L - IX_C)^2}$$

या $$V = \sqrt{I^2R^2 + I^2(X_L - X_C)^2}$$

या $$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

या $$\frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

या $$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

या $$\boldsymbol{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{ ------------------------------------ (6)}$$

जहाँ $Z = \frac{V}{I} = L - C - R$ परिपथ की प्रतिधात

यदि धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर ϕ हो तो चित्र से

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_c}{V_R}$$

या $$\tan\phi = \frac{IX_L - IX_C}{IR}$$

या $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

या $$\boldsymbol{\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \text{ -- (7)}$$

फेजर आरेख से स्पष्ट है कि परिपथ में धारा I आरोपित विभवान्तर V से कला में कोण ϕ से पश्चगामी होती है। अतः परिपथ में धारा

$$\boldsymbol{I = I_0 \sin(\omega t - \phi)} \text{ ------------------------------------ --(8)}$$

विशेष परिस्थितियाँ (Special cases) :

(i) यदि $X_L > X_C$ या $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, तब ϕ धनात्मक होगा। अतः परिपथ में धारा आरोपित वि. वा. बल से कला में कोण ϕ से पश्चगामी होगी।

(ii) यदि $X_L < X_C$ या $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, तब ϕ ऋणात्मक होगा। अतः परिपथ में धारा आरोपित वि. वा. बल से कला में कोण ϕ से अग्रगामी होगी।

(iii) यदि $X_L = X_C$ या $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, तब $\phi = 0$ होगा। अतः परिपथ में धारा और आरोपित वि. वा. बल समान कला में होंगे। इसे अनुनाद की स्थिति कहते हैं। अनुनाद की स्थिति

में परिपथ की प्रतिबाधा न्यूनतम और $Z = R$ होती है तथा परिपथ में धारा अधिकतम होती है।

अनुनाद की स्थिति में –

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

या $$\omega^2 LC = 1$$

या $$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

या $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

यदि प्रत्यावर्ती वि. वा. बल की आवृत्ति f हो तो $\omega = 2\pi f$

अतः $$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

या $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{---} (9)$$

इसे श्रेणी LCR परिपथ की अनुनादी आवृत्ति कहते हैं।

प्रश्न :– अनुनादी परिपथ किसे कहते हैं? श्रेणी अनुनादी परिपथ की आवश्यक शर्त लिखिये और अनुनादी आवृत्ति का सूत्र निगमित कीजिये। ये परिपथ कहाँ उपयोग होते हैं? श्रेणी LCR परिपथ की विशेषतायें लिखिये।

उत्तर :– अनुनादी परिपथ :– यदि किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में आरोपित विभवान्तर और परिपथ में बहने वाली धारा समान कला में होते हैं तो परिपथ को अनुनादी परिपथ कहते हैं।

श्रेणी अनुनादी परिपथ :– प्रत्यावर्ती स्रोत के साथ श्रेणीक्रम में जुड़े प्रेरकत्व L, धारिता C व प्रतिरोध R का एक ऐसा परिपथ जो स्रोत की एक विशेष आवृत्ति पर परिपथ में अधिकतम धारा बहने देता है, श्रेणी अनुनादी परिपथ कहलाता है।.

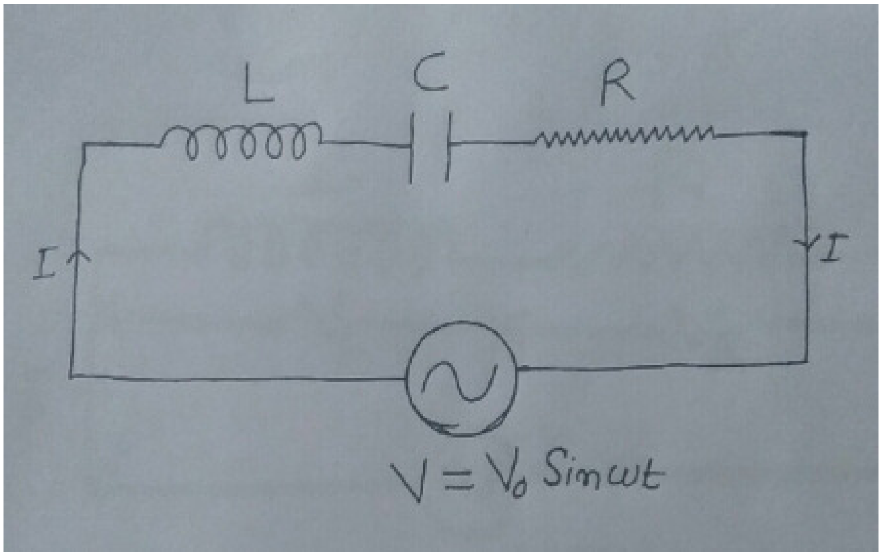


Fig. : Series LCR resonant circuit

श्रेणी LCR अनुनादी परिपथ की आवश्यक शर्त :– अनुनाद की अवस्था में प्रेरकत्वीय प्रतिघात, धारितीय प्रतिघात के बराबर होती है तथा धारा और आरोपित विभवान्तर के मध्य कलान्तर शन्य होता है अर्थात् $\phi = 0$।

टवुनादी आवृत्ति (Resonant frequency) :-

अनुनाद की अवस्था में –

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

या $$\omega^2 LC = 1$$

या $$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

या $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

यदि प्रत्यावर्ती वि. वा. बल की आवृत्ति f हो तो $\omega = 2\pi f$

अतः

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

या $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{--} \quad (1)$$

उपयोग :– (1) LCR श्रेणी अनुनादी परिपथ का उपयोग रेड़ियो अभिग्राही में ट्यूनिंग के लिये किया जाता है।

(2) LCR श्रेणी अनुनादी परिपथ का उपयोग विशेष आवृत्ति की धारा का चयन करने के लिए ग्राही परिपथ के रूप में भी किया जाता है।

विशेषतायें :– (1) इस परिपथ में प्रेरण प्रतिघात और धारितीय प्रतिघात बराबर होते हैं।

(2) इस परिपथ में प्रतिबाधा न्यूनतम ($Z = R$) और परिपथ में धारा अधिकतम होती है जो कि परिपथ के ओमीय प्रतिरोध पर निर्भर करती है।

(3) परिपथ में धारा और आरोपित विभवान्तर समान कला में होते हैं।

(4) परिपथ का शक्ति गुणांक एक होता है।

(5) अनुनादी आवृत्ति पर परिपथ के ओह्मीय प्रतिरोध का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(6) प्रेरकत्व के सिरों पर विभवान्तर और संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर समान होता है तथा यह विभवान्तर आरोपित विभवान्तर से अधिक हो सकता है।

प्रश्न :– समान्तर अनुनादी परिपथ की अनुनादी आवृत्ति का सूत्र निगमित करो।

समान्तर अनुनादी परिपथ :– चित्र में एक शुद्ध प्रेरकत्व L और C धारिता का संधारित्र बिन्दुओं A और B के मध्य समान्तर क्रम में जुड़े हैं। परिपथ के बिन्दुओं A और B के मध्य एक वि. वा. बल आरोपित किया गया है।

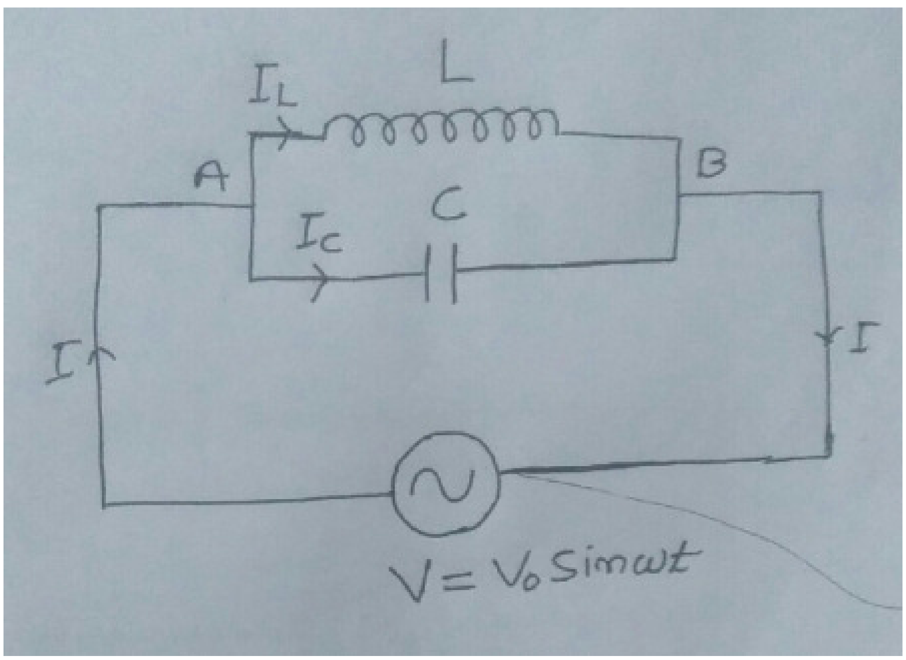


Fig. : Parallel resonant circuit

किसी क्षण प्रत्यावर्ती वि. वा. बल निम्न समीरण से दिया जाता है–

$$V = V_0 \sin \omega t \text{ -- } (1)$$

माना किसी क्षण स्रोत से ली गयी धारा I है जिसके फलस्वरूप प्रेरकत्व वाली शाखा में धारा I_L और संधात्रि वाली शाखा में धारा I_C बहती है। चूँकि प्रेरकत्व में धारा I_L, आरोपित विभवान्तर से कला कोण $\frac{\pi}{2}$ पश्चगामी होती है तथा संधारित्र में धारा I_C, आरोपित विभवान्तर से कला कोण $\frac{\pi}{2}$ अग्रगामी होती है, अतः किसी क्षण t पर ये धारायें निम्न होगीं :

$$I_L = \frac{V_0}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ ---------------------------- } (2)$$

$$I_C = \frac{V_0}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ --------------------------- } (3)$$

किसी क्षण परिपथ में कुल धारा

$$I = I_L + I_C$$

या
$$I = \frac{V_0}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{V_0}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

या
$$I = \frac{V_0}{X_L} (-\cos \omega t) + \frac{V_0}{X_C} \cos \omega t$$

या
$$I = V_0 \left(-\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}\right) \cos \omega t \text{ ------------------- } (4)$$

अनुनाद की स्थिति में $I = 0$, अतः समी. (4) से –

$$V_0 \left(-\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}\right) \cos \omega t = 0$$

या
$$-\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} = 0$$

या
$$\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C}$$

या
$$X_L = X_C$$

या
$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

या
$$\omega^2 LC = 1$$

या
$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

या $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

यदि प्रत्यावर्ती वि. वा. बल की आवृत्ति f हो तो $\omega = 2\pi f$

अतः

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

या $$\boldsymbol{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad \text{--} \quad (5)$$

उपयोग :– (1) समान्तर अनुनादी परिपथ का उपयोग किसी परिपथ में किसी नियत आवृत्ति के सिग्नल को अन्य आवृत्तियों से अलग करने के लिए किया जाता है।

(2) समान्तर अनुनादी परिपथ का उपयोग रेड़ियो प्रेषित्र में एक विशेष आवृत्ति की धारा को रोकने के लिए फिल्टर के रूप में किया जाता है।

विशेषताएँ :– (1) इस परिपथ की प्रतिबाधा अधिकतम (अनन्त) और धारा न्यूनतम

(शून्य) होती है।

(2) इस परिपथ में धारा प्रवर्धन होता है।

प्रश्न :– श्रेणी अनुनादी परिपथ और समान्तर अनुनादी परिपथ में अन्तर लिखिये।

उत्तर :– श्रेणी अनुनादी परिपथ और समान्तर अनुनादी परिपथ में अन्तर :–

क्रमांक	श्रेणी अनुनादी परिपथ	समान्तर अनुनादी परिपथ
1.	इसमें प्रत्यावर्ती धारा स्रोत के साथ श्रेणीक्रम में प्रेरकत्व L, धारिता C तथा प्रतिरोध R जुड़े होते हैं।	इसमें नगण्य प्रतिरोध की कुण्ड़ली L, C धारिता के संधारित्र के साथ समान्तर क्रम में प्रत्यावर्ती धारास्रोत से जुड़ी होती है।
2.	अनुनाद की स्थिति में प्रतिबाधा न्यूनतम ($Z = R$) होती है।	अनुनाद की स्थिति में प्रतिबाधा अधिकतम ($Z =$ अनन्त) होती है।
3.	अनुनाद की स्थिति में धारा अधिकतम होती है।	अनुनाद की स्थिति में धारा न्यूनतम होती है।
4.	प्रेरकत्व व संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर परस्पर विपरीत कला में तथा परिमाण में बराबर होते हैं।	प्रेरकत्व व संधारित्र में धाराएँ परस्पर विपरीत कला में तथा परिमाण में बराबर होती हैं।
5.	यह परिपथ केवल अनुनादी आवृत्ति की धारा को ग्रहण करता है तथा अन्य सभी आवृत्तियों को अस्वीकृत कर देता है।	यह परिपथ केवल अनुनादी आवृत्ति की धारा को अस्वीकृत करता है तथा शेष सभी आवृत्तियों को ग्रहण करता है।
6.	विशेषता गुणांक $Q = \frac{\omega_r L}{R}$	विशेषता गुणांक $Q =$ अनन्त
7.	वोल्टेज प्रवर्धन $= Q$	धारा प्रवर्धन = अनन्त

प्रश्न :– विशेषता गुणांक किसे कहते हैं ? इसका सूत्र निगमित करो।

उत्तर :– विशेषता गुणांक :– अनुनाद की तीक्षता की माप एक विमाहीन राशि से की जाती है, जिसे विशेषता गुणांक कहते है। विशेषता गुणांक की परिभाषा निम्न प्रकार से दी जाती है –

विशेषता गुणांक $Q = 2\pi \times$ परिपथ में संचित कुल ऊर्जा / प्रति चक्र परिपथ में क्षय ऊर्जा

विशेषता गुणांक $Q = 2\pi \frac{Total\ energy\ stored\ in\ the\ circuit}{Loss\ in\ energy\ in\ each\ cycle}$ ---------------------------- (1)

परिपथ में संचित कुल ऊर्जा = प्रेरकत्व में संचित अधिकतम ऊर्जा $= \frac{1}{2} L I_0^2$

$$\because\ I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

या $$I_0 = \sqrt{2}\, I_{rms}$$

परिपथ में संचित कुल ऊर्जा = प्रेरकत्व में संचित अधिकतम ऊर्जा $= \frac{1}{2} L\left(\sqrt{2}\, I_{rms}\right)^2$

या परिपथ में संचित कुल ऊर्जा $= \frac{1}{2} L\, 2\, I_{rms}^2$

या परिपथ में संचित कुल ऊर्जा $= L\ I_{rms}^2$

प्रति चक्र परिपथ में क्षय ऊर्जा $= I_{rms}^2 R$

यदि प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति f हो तो

प्रति चक्र परिपथ में क्षय ऊर्जा $= \frac{I_{rms}^2 R}{f}$

समीकरण (1) में उपरोक्त मान रखने पर

$$Q = 2\pi \frac{L\ I_{rms}^2}{\frac{I_{rms}^2 R}{f}}$$

या $$Q = \frac{2\pi f L}{R}$$

या $$Q = \frac{\omega L}{R} \text{ --------------------------------- (2)} \quad [\because\ \omega = 2\pi f]$$

लेकिन अनुनाद की स्थिति में $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

समी. (2) में ω का मान रखने पर

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{L}{R}$$

या $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ ---------------------------------- (3)}$$

प्रश्न :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ के लिए $P_{aV} = V_{rms}\, I_{rms} \cos\phi$ का निगमन करो।

उत्तर :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ की शक्ति :– किसी विद्युत परिपथ में ऊर्जा व्यय की दर को शक्ति कहते हैं।

माना किसी परिपथ में प्रत्यावर्ती विभवान्तर $V = V_0 \sin\omega t$ लगाने से किसी क्षण धारा $I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ है तो उस क्षण परिपथ में व्यय शक्ति

$$P = V\, I$$

या $$P = V_0 \sin\omega t \times I_0 \sin(\omega t - \phi)$$

या $$P = V_0\, I_0 \sin\omega t\ \sin(\omega t - \phi)$$

या $$P = V_0\, I_0 \sin\omega t\ (\sin\omega t\ \cos\phi - \cos\omega t\ \sin\phi)$$

या $$P = V_0\, I_0\ (\sin^2\omega t\ \cos\phi - \sin\omega t \cos\omega t\ \sin\phi)$$

या $$P = V_0\, I_0\left[\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)\cos\phi - \frac{1}{2}(2\sin\omega t\cos\omega t\ \sin\phi)\right]$$

या $$P = \frac{V_0\, I_0}{2}\,[(1-\cos 2\omega t)\ \cos\phi - \sin 2\omega t\ \sin\phi\,]$$

एक पूर्ण चक्र में व्यय औसत शक्ति

$$P_{aV} = \frac{\int_0^T P\, dt}{\int_0^T dt}$$

या $$P_{aV} = \frac{\int_0^T \frac{V_0\, I_0}{2}\,[(1-\cos 2\omega t)\ \cos\phi - \sin 2\omega t\ \sin\phi\,]\, dt}{[t]_0^T}$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2}\ \frac{\int_0^T\ [(1-\cos 2\omega t)\ \cos\phi - \sin 2\omega t\ \sin\phi\,]\, dt}{T-0}$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\int_0^T\ [(1-\cos 2\omega t)\ \cos\phi - \sin 2\omega t\ \sin\phi\,]\, dt$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\left[\int_0^T (1-\cos 2\omega t)\ \cos\phi\ dt - \int_0^T \sin 2\omega t\ \sin\phi\ dt\right]$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\left[\cos\phi \int_0^T (1 - \cos 2\omega t)\; dt - \sin\phi \int_0^T \sin 2\omega t \;\; dt\right]$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\left[\cos\phi \left\{\int_0^T 1dt - \int_0^T \cos 2\omega t \;\; dt\right\} - \sin\phi \int_0^T \sin 2\omega t \;\; dt\right]$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\left[\cos\phi \left\{(t)_0^T - \left(\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)_0^T\right\} - \sin\phi \left(-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega}\right)_0^T\right]$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\left[\cos\phi \left\{(T-0) - \frac{1}{2\omega}\left(\sin 2\frac{2\pi}{T}T - \sin 0\right)\right\} - \frac{1}{2\omega}\sin\phi \left(-\cos 2\frac{2\pi}{T}T + \cos 0\right)\right]$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\left[\cos\phi \left\{T - \frac{1}{2\omega}(\sin 4\pi - \sin 0)\right\} - \frac{1}{2\omega}\sin\phi \;(-\cos 4\pi + \cos 0)\right]$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\left[\cos\phi \;\{T\} - \frac{1}{2\omega}\sin\phi \;(-1 + 1)\right]$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2T}\; T \;\cos\phi$$

या $$P_{aV} = \frac{V_0\, I_0}{2}\cos\phi \text{ -- } (1)$$

$\because\; V_0 = \sqrt{2}\, V_{rms}\;\; and\; I_0 = \sqrt{2}\, I_{rms}$ hence from equ(1)

$$P_{aV} = \frac{\sqrt{2}\, V_{rms}\sqrt{2}\, I_{rms}}{2}\cos\phi$$

या $$\boldsymbol{P_{aV} = V_{rms}\, I_{rms}\, \cos\phi.}$$

प्रश्न :– वाटहीन धारा किसे कहते हैं ? किन परिस्थितियों में धारा वाटहीन होती है ? चोक कुण्ड़ली में बहने वाली धारा बाटहीन होती है, क्यों ?

उत्तर :– वाटहीन धारा :– यदि परिपथ में ओह्मीय प्रतिरोध शून्य होता है, तो परिपथ में धारा तो बहती है, लेकिन एक चक्र में व्यय औसत शक्ति शूव्य होती है। ऐसी धारा को वाटहीन धारा कहते हैं।

वाटहीन धारा के लिए शर्त :– वाटहीन धारा के लिए प्रत्यावर्ती धारा परिपथ का प्रतिरोध शून्य होना चाहिये या धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर शून्य होना चाहिये।

चूँकि चोक कुण्ड़ली का प्रतिरोध लगभग शून्य होता है तथा धारा और विभवान्तर के मध्य कलान्तर 90^0 होता है, इसलिए एक चक्र में औसत व्यय शक्ति शून्य होती है। अतः चोक कुण्ड़ली में बहने वाली धारा वाटहीन धारा होती है।

प्रश्न :– चोक कुण्ड़ली क्या है ? चोक कुण्ड़ली की संरचना और कार्यविधि लिखिये।

उत्तर :– चोक कुण्ड़ली :– प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में धारा को नियंत्रित करने के लिए प्रयुक्त उच्च प्रेरकत्व व नगण्य प्रतिरोध की कुण्ड़ली को चोक कुण्ड़ली कहते है।

संरचना :– चित्र में चोक कुण्ड़ली प्रदर्शित है। यह ताँबे के मोटे विद्युतरोधी तार के अनेक फेरों को पटलित नर्म लाहे के क्रोड़ पर लपेट कर बनायी जाती है। मोटा ताँबे का तार लेने से कुण्ड़ली का प्रतिरोध नगण्य हो जाता है तथा फेरों की संख्या अधिक लेने से व नर्म लोहे का क्रोड़ प्रयुक्त करने से कुण्ड़ली का स्वप्रेरकत्व अधिक हो जाता है जिससे इसकी प्रतिबाधा अधिक हो जाती है।

कार्यविधि :– जब प्रतिरोध R और प्रेरकत्व L लगे परिपथ में प्रत्यावर्ती विभवान्तर $V = V_0 \sin \omega t$ लगाया जाता है तो परिपथ में तात्क्षणिक धारा $I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ प्रवाहित होने लगती है। यहाँ धारा I विभवान्तर V से कला में कोण ϕ से पश्चगामी है तथा $\tan \phi = \frac{\omega L}{R}$।

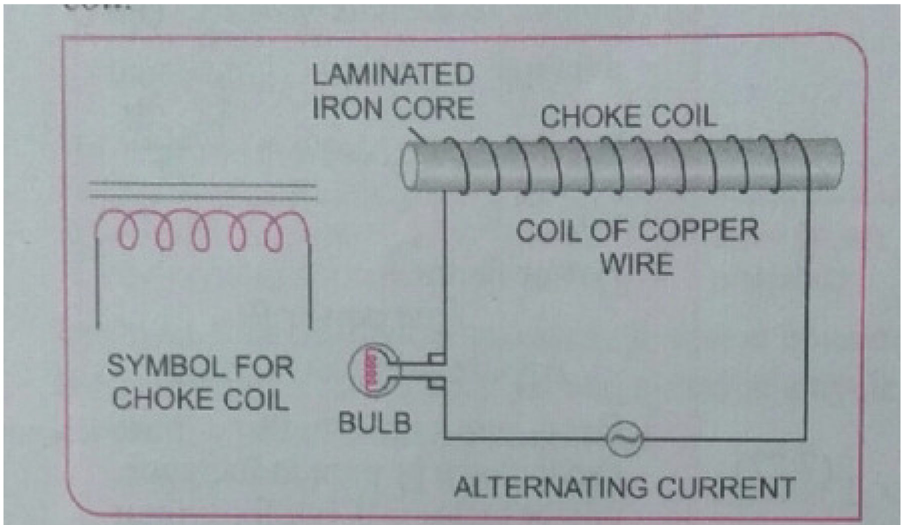


Fig 7.31. Choke coil

परिपथ में प्रति चक्र औसत व्यय शक्ति

$$P_{aV} = V_{rms}\, I_{rms} \cos \phi$$

जहाँ शक्ति गुणांक $\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

चूँकि चोक कुण्ड़ली का ओह्मीय प्रतिरोध लगभग शून्य और इसका प्रेरकत्व बहुत अधिक है अतः $\cos \phi = 0$ (लगभग) और एक चक्र में व्यय औसत शक्ति $P_{aV} = 0$ (लगभग)। अतः चोक कुण्ड़ली में बिना ऊर्जा व्यय किये ही धारा प्रवाहित होती है।

प्रश्न :– ट्रॉंसफार्मर किसे कहते हैं ? ट्रॉंसफार्मर का वर्णन निम्न शीर्षकों के अन्तर्गत करो :–

(i) सिद्धान्त (ii) ट्रॉंसफार्मर के प्रकार (iii) संरचना (iv) कार्यविधि

(*v*) परिणमन अनुपात का सूत्र **(*vi*) ट्रॉंसफाम्र्र में ऊर्जा हानि**

उत्तर :– ट्रॉंसफार्मर :– ट्रॉंसफार्मर एक ऐसी युक्ति है जो प्रत्यावत्री विभवान्तर को बढ़ाने या घटाने के निए प्रयुक्त किया जाता है।

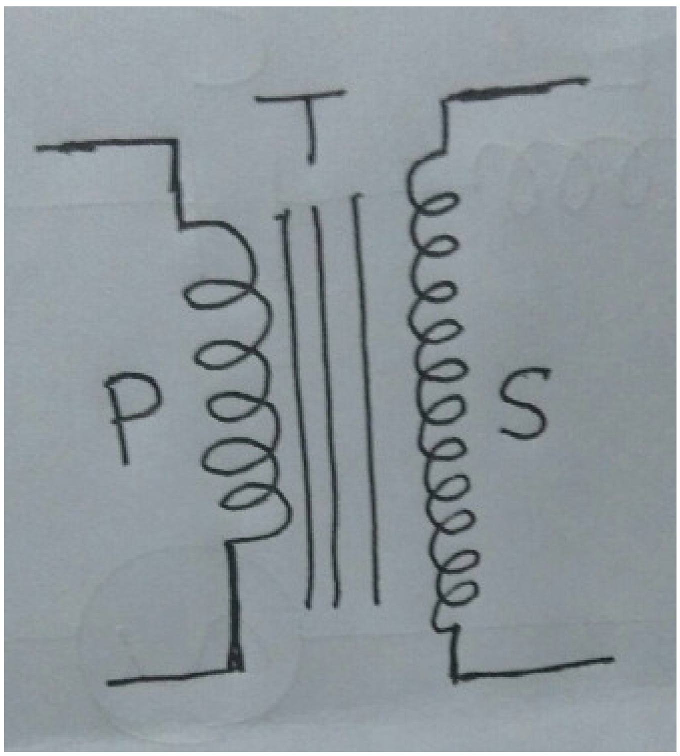
(*i*) सिद्धान्त :– ट्रॉंसफार्मर की कार्यविधि अन्योन्य प्रेरण के सिद्धान्त पर आधारित है।

(*ii*) ट्रॉंसफार्मर के प्रकार :– ट्रॉंसफार्मर दो प्रकार के होते हैं –

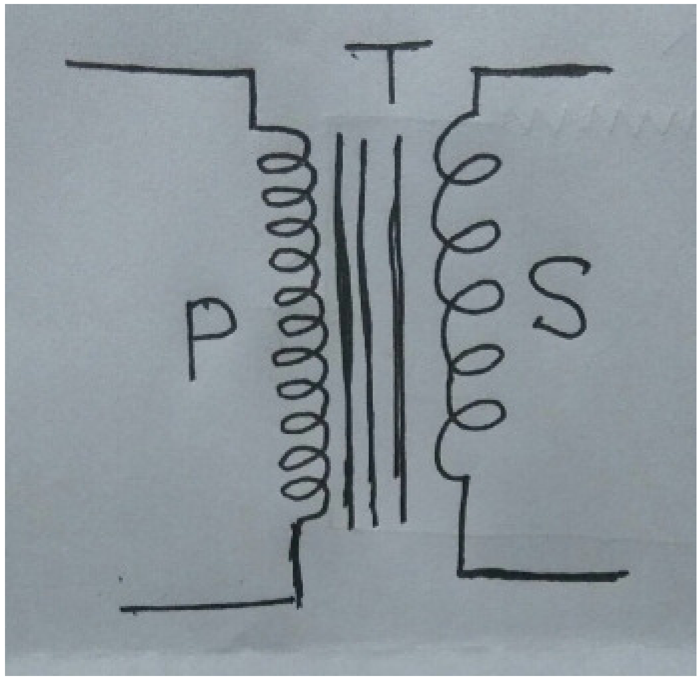
1. उच्चायी ट्रॉंसफार्मर :– यह निम्न प्रत्यावर्ती विभवान्तर को समान आवृत्ति के उच्च प्रत्यावर्ती विभवान्तर में बदलता है। इसमें आउटपुट में प्राप्त धारा, इनपुट धारा से कम होती है।

2. अपचायी ट्रॉंसफार्मर :– यह उच्च प्रत्यावर्ती विभवान्तर को समान आवृत्ति के निम्न प्रत्यावर्ती विभवान्तर में बदलता है। इसमें आउटपुट में प्राप्त धारा, इनपुट धारा से अधिक होती है।

.



2. अपचायी ट्रॉंसफार्मर :– यह उच्च प्रत्यावर्ती विभवान्तर को समान आवृत्ति के निम्न प्रत्यावर्ती विभवान्तर में बदलता है। इसमें आउटपुट में प्राप्त धारा, इनपुट धारा से अधिक होती है।



(iii) संरचना :– ट्राँसफार्मर के मुख्य निम्नलिखित तीन भाग होते हैं –

1. पटलित क्रोड़ 2. प्राथमिक कुण्ड़ली 3. द्वितीयक कुण्ड़ली

ठसमें नम्र लोहे की पतली–पतली पत्तियों को एक के ऊपर एक रखकर बनाया गया आयताकार अथव वृत्ताकार पटलित क्रोड़ लिया जाता है। पत्तियाँ एक–दूसरे से वार्निश द्वारा पृथक्कृत होती हैं। इस क्रोड़ के एक ओर प्राथमिक कुण्ड़ली P और दूसरी ओर द्वितीयक कुण्ड़ली S लिपटी रहती है। प्राथमिक कुण्ड़ली से दिये गये प्रत्यावर्ती स्रोत को जोड़ दिया जाता है और द्वितीयक कुण्ड़ली के सिरों पर प्रेरित वि. वा. बल प्राप्त किया जाता है।

(iv) कार्यविधि :– जब प्राथमिक कुण्ड़ली के सिरों पर प्रत्यावर्ती वि. वा. बल लगाया जाता है तो कुण्ड़ली में प्रत्यावर्ती धारा बहती है। यह प्रत्यावर्ती धारा क्रोड़ में प्रत्यावर्ती चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न कर देती है, अतः कुण्ड़ली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स लगातार बदलता रहता है, जिससे द्वितीयक कुण्ड़ली में उसी आवृत्ति का वि. वा. बल उत्पन्न हो जाता है।

(v) परिणमन अनुपात का सूत्र :– माना प्राथमिक कुण्ड़ली में फेरो की संख्या N_P तथा द्वितीयक कुण्ड़ली में फेरों की संख्या N_S है।

यदि प्राथमिक कुण्ड़ली के प्रत्येक फेरे से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स ϕ हो तो प्राथमिक कुण्ड़ली में प्रेरित वि. वा. बल

$$e_P = -N_P \frac{d\phi}{dt} \text{ ------------------------------------- } (1)$$

यदि चुमबकीय फ्लक्स का क्षरण शून्य हो तो द्वितीयक कुण्ड़ली के प्रत्येक फेरे से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स ϕ होगा। अतः द्वितीयक कुण्ड़ली में प्रेरित वि. वा. बल

$$e_S = -N_S \frac{d\phi}{dt} \text{ ------------------------------------- } (2)$$

समी. (2) में समी. (1) से भाग देने पर

$$\frac{e_S}{e_P} = \frac{-N_S \frac{d\phi}{dt}}{-N_P \frac{d\phi}{dt}}$$

$$\frac{e_S}{e_P} = \frac{N_S}{N_P} \text{ -- } (3)$$

यदि किसी क्षण प्राथमिक कुण्ड़ली में धारा I_P और द्वितीयक कुण्ड़ली में धारा I_S हो तो आदर्श ट्राँसफार्मर के लिए

निर्गत शक्ति = निवेशी शक्ति

या $$e_S I_S = e_P I_P$$

या $$\frac{e_S}{e_P} = \frac{I_P}{I_S} \text{ --- } (4)$$

समी. (3) और समी. (4) से

$$\frac{e_S}{e_P} = \frac{N_S}{N_P} = \frac{I_P}{I_S} \text{ -- } (5)$$

चूँकि ट्राँसफार्मर की द्वितीयक कुण्ड़ली और प्राथमिक कुण्ड़ली में फेरों की संख्या के अनुपात को ट्राँसफार्मर का परिणमन अनुपात् कहते हैं, अतः परिणमन अनुपात्

$$\text{r} = \frac{N_S}{N_P} \text{ --- } (6)$$

समी. (5) और समी. (6) को एक साथ लिखने पर

$$\frac{e_S}{e_P} = \frac{N_S}{N_P} = \frac{I_P}{I_S} = \mathbf{r} \text{ --------------------------------------- } (7)$$

(vi) ट्राँसफाम्र्र में ऊर्जा हानि :– ट्राँसफार्मर में ऊर्जा हानि निम्न चार प्रकार की होती है–

1. ताम्र हानि :– प्राथमिक कुण्ड़ली को दी गयी ऊर्जा का कुछ भाग कुण्ड़लियों के तार में ऊष्मा के रूप में व्यय हो जाता है। इसे ताम्र हानि कहते हैं।

इस कम करने के लिए उच्चायी ट्राँसफार्मर में प्राथमिक कुण्ड़ली का तार मोटा लेते हैं तथा अपचायी ट्राँसफार्मर में द्वितीयक कुण्ड़ली का तार मोटा लेते हैं।

2. शैथिल्य हानि :– ऊर्जा का कुछ भाग प्रत्यावर्ती धारा के कारण लोहे के क्रोड़ के बार–बार चुम्बकित व विचुत्बकित होने से ऊष्मा के रूप में व्यय हो जाता है। इसे शैथिल्य हानि कहते हैं।

इसे कम करने के लिए ट्राँसफार्मर का क्रोड़ नर्म लोहे का बनाया जाता है।

3. लोह हानि :– ऊर्जा का कुछ भाग क्रोड़ में उत्पन्न भँवर धाराओं के कारण ऊष्मा के रूप में व्यय हो जाता है। इसे लोह हानि कहते हैं।

इसे कम करने के लिए क्रोड़ पटलित लेते हैं।

4. चुम्बकीय फ्लक्स क्षरण के कारण हानि :– ऊर्जा का कुछ भाग चुम्बकीय फ्लक्स के क्षरण होने के कारण ऊष्मा के रूप में व्यय हो जाता है।

इसे कम करने के लिए क्रोड़ को नर्म लोहे के बन्द फ्रेम के रूप में लिया जाता है।

प्रश्न :– अपचायी ट्राँसफार्मर और उच्चायी ट्राँसफार्मर में अन्तर लिखिये।

उत्तर :– अपचायी ट्राँसफार्मर और उच्चायी ट्राँसफार्मर में अन्तर :–

क्रमांक	अपचायी ट्राँसफार्मर	उच्चायी ट्राँसफार्मर
1.	यह ट्राँसफार्मर उच्च प्रत्यावर्ती विभव को निम्न प्रत्यावर्ती विभव में बदलता है।	यह ट्राँसफार्मर निम्न प्रत्यावर्ती विभव को उच्च प्रत्यावर्ती विभव में बदलता है।
2.	यह ट्राँसफार्मर धारा की प्रबलता को बढ़ाता है।	यह ट्राँसफार्मर धारा की प्रबलता को घटाता है।
3.	इसकी द्वितीयक कुण्ड़ली में फेरों की संख्या प्राथमिक कुण्ड़ली में फेरों की संख्या से कम होती है।	इसकी द्वितीयक कुण्ड़ली में फेरों की संख्या प्राथमिक कुण्ड़ली में फेरों की संख्या से अधिक होती है।
4.	इसकी प्राथमिक कुण्ड़ली का तार, द्वितीयक कुण्ड़ली के तार की अपेक्षा पतला होता है।	इसकी द्वितीयक कुण्ड़ली का तार प्राथमिक कुण्ड़ली के तार की अपेक्षा पतला होता है।

प्रश्न :– ट्राँसफार्मर के उपयोग लिखिये।

उत्तर :– ट्राँसफार्मर के उपयोग :– (1) विद्युत शक्ति को पावर उत्पादन केन्द्र से दूर स्थानों पर भेजने में।

(2) रात्रि लैम्प के साथ।

(3) वेल्डिंग कार्य में।

(4) विद्युत संयन्त्र जैसे – टेलीविजन, रेड़ियो, रेफ्रिजरेटर, मोटर आदि में ।

प्रश्न :– डायनमो क्या है? प्रत्यावर्ती धारा डायनमों का वर्णन निम्न शीर्षकों के अन्तर्गत कीजिए –

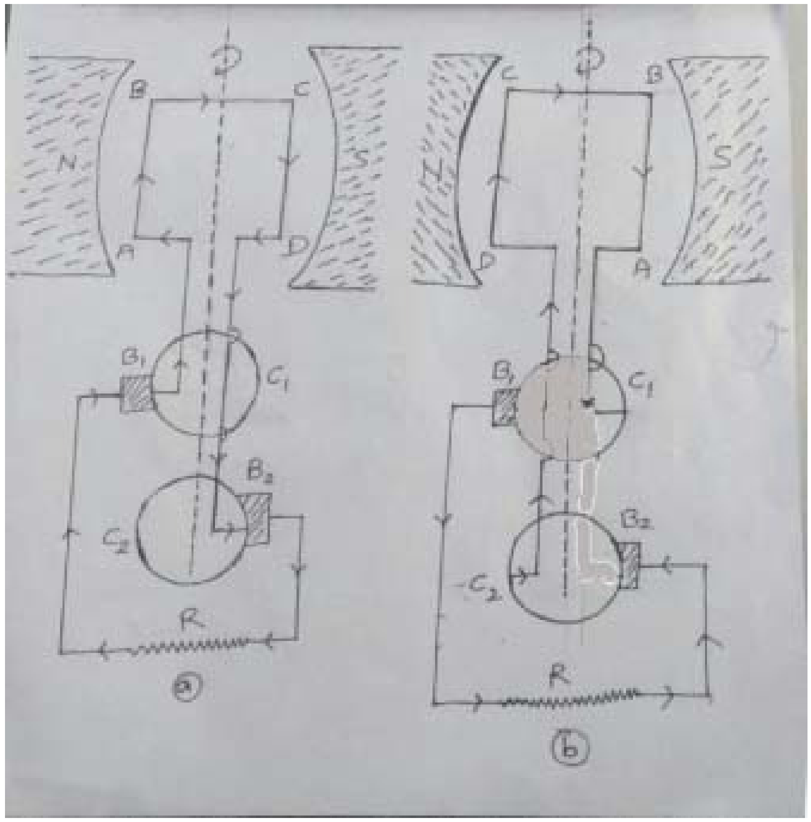
1. सिद्धान्त 2. चित्र 3. संरचना 4. कार्यविधि

उत्तर :– डायनमो :– डायनमा एक ऐसा विद्युत यंत्र है जो यांत्रिक ऊर्जा को विद्युत ऊर्जा में बदलता है।

1. सिद्धान्त :– ट्रॉंसफार्मर की कार्यविधि विद्युत चुम्बकीय प्रेरण के सिद्धान्त पर आधारित है।

जब कोई आयताकार या वृत्ताकार कुण्ड़ली एक चुम्बकीय क्षेत्र में चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् अक्ष के परितः घूमती है तो कुण्ड़ली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स लगातार बदलता रहता है जिससे कुण्ड़ली में वि. वा. बल प्रेरित हो जाता है। यदि कुण्ड़ली का परिपथ बन्द हो तो कुण्ड़ली में प्रेरित धारा बहने लगती है।

2. चित्र :–



3. संरचना :– चित्र में प्रत्यावर्ती धारा डायनमों की संरचना प्रदर्शित है। इस डायनमों के मुख्य भाग निम्न हैं–

(i) क्षेत्र चुम्बक :– यह एक अतिशक्तिशाली नाल चुम्बक NS होता है जिसके ध्रुवों के मध्य शक्तिशाली चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।

(ii) आर्मेचर या कुण्ड़ली $ABCD$:– यह मुलायम लोहे के क्रोड़ पर लिपटी अत्यधिक संख्या में पृथक्कृत तारों की कुण्ड़ली है जिसे नाल चुम्बक के ध्रुवों के मध्य उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र में क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् अक्ष के परितः तीव्र गति से घुमाया जाता है।

(iii) सर्पी वलय :– कुण्ड़ली के सिरे A व D क्रमशः अलग–अलग पृथक्कृत धात्विक वलयों C_1 व C_2 से जोड़ दिये जाते हैं। ये वलय सम–अक्षीय होते हैं तथा कुण्ड़ली के साथ–साथ घूमते हैं।

(iv) ब्रुश :– ये कार्बन या किसी धातु की पत्तियों से बने दो ब्रुश B_1 व B_2 होते हैं, जिनका एक–एक सिरा तो वलयों को स्पर्श करता है तथा शेष दूसरे सिरों से बाहरी परिपथ जोड़ दिया जाता है।

4. कार्यविधि :– जब कुण्ड़ली $ABCD$ चुम्बक के ध्रुवों के मध्य घूमती है तो यह चुमबकीय बल रेखाओं को काटती है, जिससे कुण्ड़ली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स बदलता है और कुण्ड़ली में प्रेरित धारा उत्पन्न हो जाती है।

माना प्रारम्भ में कुण्ड़ली का तल चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् है। कुण्ड़ली का सिरा A सर्पी वलय C_1 से ओर सिरा D सर्पी वलय C_2 से जुड़ा है। सर्पी वलय भी कुण्ड़ली के साथ–साथ घूमते हैं। ब्रुश B_1 सर्पी वलय C_1 को और ब्रुश B_2 सर्पी वलय C_2 को स्पर्श करता है।

माना कुण्ड़ली $ABCD$ दक्षियावर्ती दियाा में घूमती है। माना किसी क्षण कुण्ड़ली की भुजा AB ऊपर की ओर और कुण्ड़ली की भुजा CD नीचे की ओर गति करती है, अतः फ्लेमिंग के दांये हाथ के नियमानुसार कुण्ड़ली में प्रेरित धारा की दिशा $ABCD$ के अनुदिश होगी तथा बाह्य प्रतिरोध R में धारा की दिशा ब्रुश B_2 से ब्रुश B_1 की ओर होती है।

अर्द्ध चक्र के पश्चात् भुजाओं AB और CD की स्थितियॉं आपस में बदल जाती हैं। सर्पी वलय C_1 और C_2 अपने ही स्थान में घूम जाते हैं। अतः ब्रुश B_1 का सम्पर्क सप्री वलय C_1 से और ब्रुश B_2 का सम्पर्क सर्पी वलय C_2 से बना रहता है। अब भुजा CD ऊपर की ओर और भुजा AB नीचे की ओर गति करती है। इस स्थिति में कुण्ड़ली में धारा $DCBA$ दिशा में और बाह्य प्रतिरोध R में धारा ब्रुश B_1 से ब्रुश B_2 की ओर प्रवाहित होती है।

अतः बाह्य प्रतिरोध में प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित होती है जिसकी आवृत्ति कुण्ड़ली के घूमने की आवृत्ति के बराबर होती है।